



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen}(x) + x \cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcula a y el valor del límite (\ln denota logaritmo neperiano).

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

- a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$.
- b) [0'75 puntos] Calcula B^2 y B^{2016} .

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta r dada por $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- a) [1 punto] Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
- b) [1'5 puntos] Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f . Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f .
- b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Ejercicio 2.- Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (\ln representa logaritmo neperiano).

- a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
- b) [2 puntos] Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f , la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

Ejercicio 3.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases}$$

- a) [1'5 puntos] Discútelos según los valores del parámetro α .
- b) [1 punto] Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x = 4$.

Ejercicio 4.- Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

- a) [1'5 puntos] Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
- b) [1 punto] Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{array} \right\}$$

- a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores de λ .
- b) [0'75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

Ejercicio 4.- Considera el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$

- a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r .
- b) [1 punto] Determina la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A .





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

- a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
- b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$ (sugerencia: $t = \sqrt{x}$).

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Calcula el rango de $AB^T + \lambda I$ según los valores de λ (B^T es la matriz traspuesta de B , I es la matriz identidad de orden 3).
- b) [1'5 puntos] Calcula la matriz X que verifica $CX - X = 2I$.

Ejercicio 4.- [2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

$$x = y = z \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- Sea la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

- a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
- b) [1'5 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b .

Ejercicio 3.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

- a) [1'75 puntos] Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema dado por $(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Sea r la recta dada por $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ y sea s la recta definida por $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

- a) [1'75 puntos] Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .
- b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s .





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x = 1$ y un punto de inflexión en $(-1, 5)$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m > 0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX .

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

- a) [1 punto] Discútelo según los valores de λ .
- b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $\lambda = 0$.
- c) [0'75 puntos] Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcula esa solución.

Ejercicio 4.- Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1, 1, 0)$ y $B(2, 2, 1)$. Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

- a) [0'75 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas de r .
- b) [1 punto] Calcula el área del triángulo ABC .
- c) [0'75 puntos] Determina las coordenadas del punto D .





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (e^{ax} + b)x$, con $a \neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x = 1$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula el valor de $a > 0$ para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2} dx = 1$.

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m .
- b) [1 punto] Resuelve el sistema para $m = -3$ y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que $x = 2$.

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.

- a) [1 punto] Halla el punto de π más próximo al punto $(3, 1, 2)$.
- b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + mx$ siendo $m > 0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

Ejercicio 3.- De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:

- la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
 - el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.
- a) [1'5 puntos] Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C .
- b) [1 punto] Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

Ejercicio 4.- Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(3, -1, 1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

- a) [1'25 puntos] Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.
- b) [1'25 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s .





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}} dx \quad (\text{sugerencia : } t = \sqrt{2x+1}).$$

Ejercicio 3.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de k en cada uno de los casos siguientes:

- a) [0'75 puntos] $\text{rango}(A) = 1$. c) [0'5 puntos] A tiene inversa.
- b) [0'75 puntos] $A^2 = A$. d) [0'5 puntos] $\det(A) = -2$.

Ejercicio 4.- [2'5 puntos] Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$





UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II
 CURSO 2015-2016

Instrucciones: a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

- a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = -2 \operatorname{sen}(2x), \quad f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ejercicio 3.- Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda + 1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1'5 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1} = 2I - A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).
- b) [1 punto] Determina, si existen, los valores de λ para los que la matriz $A + A^T$ no tiene inversa (A^T es la matriz traspuesta de A).

Ejercicio 4.- Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$$

- a) [1 punto] Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π .
- b) [1'5 puntos] ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π ?

